2011 年 5 月 21 日 情報システム基盤学合同輪講発表資料

Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows

著者： Poinsot, T. J. and Lele, S. K.
出典： *Journal of Computational Physics, Vol.101(1992), pp.1-24*
発表者： 田研究室 1253017 三宅 若

1 序論

例えば空を飛ぶ航空機からでる音波を計算しようとする場合，計算機資源は有限であるため，空全体を計算することはできないので，計算領域を設定する必要がある．そこで，人為的に打ち切った境界の値が重要となる．

流体の方程式には非粘性の Euler 方程式と粘性の Navier-Stokes 方程式（以下 NS 方程式）がある．NS 方程式は，Euler 方程式に粘性項を加えたものである．しかし，この粘性項が加わることにより，NS 方程式の取り扱いが難しくなる．Euler 方程式は熱や粘性によるエネルギー散逸がない場合のみ用いられるが，NS 方程式は全ての流体の運動を記述する．つまりは NS 方程式の境界条件を知りたいわけである．Euler 方程式の境界条件は特性の理論より得られる．そこで，NS 方程式=Euler 方程式+粘性項であるので，NS 方程式の境界条件=Euler 方程式の境界条件+粘性条件と，分けて考える．

2 特性の理論 [1]

簡単のために，一次元のオイラー方程式を考える．ρ は密度，u は x 方向速度，p は圧力，e は全エネルギーとして，

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (e+p)\,u \end{bmatrix} \tag{2}$$

式 1 を次のように書き換える．γ を比熱比，$s = p\rho^{-\gamma}$ として，

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ s \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{p}{\rho s} \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \tag{4}$$

$\boldsymbol{A}$ の固有値を λ_i，左固有ベクトル $\boldsymbol{l}$ とすれば，

$$\boldsymbol{l}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} + \lambda_i \boldsymbol{l}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

対角化をすることによって，3 つの常微分方程式として捉える．λ_i は特性波の速度である．特性波の振幅は $\lambda_i \boldsymbol{l}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}$ であり，これを L_i と表記する．

境界を出入りする波（特性波）のイメージは図 1 の通りである．図 1 中，赤丸で囲まれている波は，計算領域外部から来る波であるので，計算ができない．

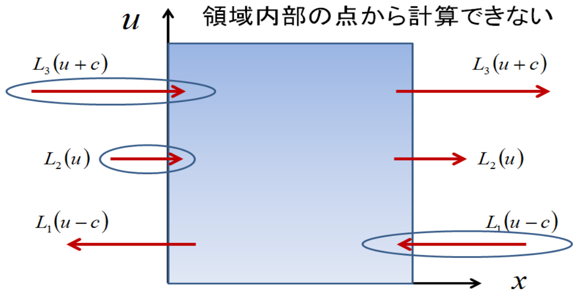


図 1: 特性波のイメージ

3 LODI 条件

LODI とは Local One-Dimensional Invicid の略である．境界上でのみ，波を一次元でかつ非粘性であると考える条件である．特性の理論の説明では一次元のオイラー方程式で理論を展開したが，ここでは，二次元のオイラー方程式を考える．v は y 方向速度である．

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ s \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & 0 & \frac{p}{\rho s} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} v & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v & \frac{p}{\rho s} \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \tag{7}$$

本来，二次元の問題であれば，式 6 の左辺の全ての項に特性の理論を適用するべきであるが，今回は一次元として捉えているので，

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

に対して特性の理論を適用する．すると，以下の関係が得られる．$L_{xi}(i = 1, 2, 3, 4)$ は速度 $\lambda_{xi}(i = 1, 2, 3, 4)$ を持つ特性波の振幅であり，次式で表される．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left[L_2 + \frac{1}{2}(L_4 + L_1)\right] = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(L_4 - L_1) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L_3 = 0 \tag{12}$$

$$L_{x1} = \lambda_{x1}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{13}$$

$$L_{x2} = \lambda_{x2}\left(c^2\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{14}$$

$$L_{x3} = \lambda_{x3}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15}$$

$$L_{x4} = \lambda_{x4}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{16}$$

固有値（速度）は次のとおりである．

$$\lambda_{x1} = u - c,\ \ \lambda_{x2} = \lambda_{x3} = u,\ \ \lambda_{x4} = u + c \tag{17}$$

式 9 から式 12 より，各 L_i の関係が得られるので，先述した外部領域からくる波の振幅が計算できるようになる．

4 低レイノルズ数ポアズイユ流れへの実装

4.1 計算領域

計算領域は図 2 の通りである．ダクト半幅が l で，x 方向長さ $L_x = 10l$ である．

図 2: 計算領域

4.2 流入条件

流入条件は次式で表される流れとする．u_0 は主流速度，T_0 は 293.15[K] であり，壁面温度でもある．

$$u(0, y, t) = u_0\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{l}\right)\right]^2 \tag{18}$$

$$v(0, y, t) = 0 \tag{19}$$

$$T(0, y, t) = T_0 \tag{20}$$

Ma=0.1，Re=15 である．

4.3 計算手法

(1)Ruby と Strikwerda の方法 [4]

流出境界において ρ, u, v は外挿で決める．圧力は $\sigma = 0.58$ として，次式で求める．

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma(1 - Ma^2)}{l}(p - p_{infty}) = 0 \tag{21}$$

(2)NSCBC

流出境界において，無限遠圧力を p_∞ として，L_1 を $\sigma = 0.25$ として次式で求める．

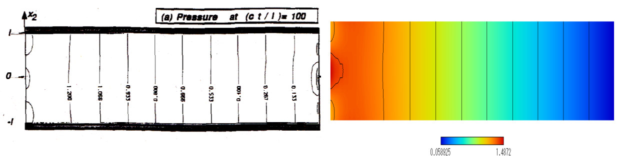
$$L_1 = \sigma c\frac{(1 - Ma^2)}{l}(p - p_\infty) \tag{22}$$

また，Dutt の提案 [4] より，

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{23}$$

4.4 計算結果

紙面の関係上，結果の図を示すことはできないが，Ruby と Strikwerda の方法では，流出部で異常な圧力分布，温度分布が見られ，速度分布は壁面近くで異常であった．一方，NSCBC で計算した方は，厳密解に近い結果が得られていた．



(a)Ruby and Strikwerda　　(b)NSCBC

図 3: 圧力 p

4.5 まとめ

- NSCBC は多次元の問題を一次元として捉えているため，完全な境界条件とは言えない．
- 実装が容易であり，また経験上，頑健である．

参考文献

[1] Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, Kevin W. Thompson, Journal of Computational Physics 68, pp.1-24(1987)

[2] J. C. Strikwerda, Commun, Pure Appl, Math. 30, 797(1977)

[3] P. Dutt, SIAM J. Numer. Anal. 25, 2, 245(1988)

[4] D . H. Ruby and J. C. Strikwerda, J. Comput. Phys. 36,55(1980)